

ÜBER DIE HÖHEREN OBSTRUKTIONEN

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Natur-
wissenschaftlichen Fakultät der Johann-
Wolfgang-Goethe-Universität zu Frankfurt/M.

Vorgelegt von
Karl Mahler
aus Königstein a.d.Elbe

Frankfurt a.M., August 1962

1962

Gedruckt mit Genehmigung
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt a.M.



Dekan: Professor Dr.Th. W i e l a n d

1.Referent: Professor Dr.W. F r a n z

2.Referent: Dozent Dr.F.W. B a u e r

Tag der mündl.Prüfung: 22.2.1963

Tag der Promotion: 27.2.1963

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Grundbegriffe	4
Stetige und semisimpliziale Abbildungen	8
Das Postnikov-System	9
Einige Eigenschaften des Postnikov-Systems	10
Postnikov-Invariante und Obstruktion	11
Abbildung eines Simplicialkomplexes in Räume des Postnikov-Systems	13
Überlagerungen von Abbildungen im Postnikov-System	21
Anwendung auf Obstruktionstheorie	28
Kozykloide	29
Beziehung zwischen Homotopieklassen und Kohomologieklassen	31

Literaturverzeichnis

- (1) E.H.Brown jr.: Finite computability of Postnikov-complexes.
Ann.of Math.65
- (2) K.Lamotke: Abstrakte Homotopie-theorie.
Bonn 1960 (Math.Institut)
- (3) K.Mizuno: On the minimal complexes.
Journ.of the Institute of Polyt.Osaka City Univ., Vol.5 Nr.1
- (4) K.Mizuno: On homotopy classification and extension,
ibid. Vol.6, Nr.2
- (5) J.C.Moore: Semisimplicial complexes and Postnikov systems.
Symposium internacional de topologia algebraica; Mexico 1958.
- (6) M.M.Postnikov: Investigations in homotopy theory of continuous mappings.
Am.Math.Soc.Transl.Ser.2, Vol.7
- (7) M.M.Postnikov: General theorems of extension and classification.
Am.Math.Soc.Transl.Ser.2, Vol.11.
- (8) K.Shiraiwa: Relation between higher Obstructions and Postnikov-Invariants.
Nagoya Math.Journal, Vol.16

Einleitung

K sei ein Simplicialkomplex, Y ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß die Homotopiegruppen $\pi_0 = 0$, $\pi_1 = 0$ sind. Gegeben sei eine stetige Abbildung

$$f : K^{n+1} \rightarrow Y ,$$

wobei K^{n+1} das $(n+1)$ -dimensionale Gerüst von K ist.

Es erhebt sich die Frage, wann die Abbildung f fortsetzbar ist auf das $(n+2)$ -dimensionale Gerüst K^{n+2} .

Zur Beantwortung dieser Frage definiert man den sogenannten Obstruktions-Kozyklus zur Abbildung f . Diese $(n+2)$ -dimensionale Kokette aus $Z^{n+2}(K, \pi_{n+1}(Y))$ ist auf dem Simplex $s_{n+2} \in K$ folgendermaßen definiert:

$$z_f^{n+2}(s_{n+2}) = [f\partial s_{n+2}] ,$$

wobei $[f\partial s_{n+2}]$ die durch die Abbildung f des Randes von s_{n+2} definierte Homotopieklasse ist. Man nennt diesen Obstruktions-Kozyklus z_f^{n+2} auch die erste Obstruktion. Es gilt der Satz:

Die Abbildung f ist dann und nur dann auf K^{n+2} fortsetzbar, wenn $z_f^{n+2} = 0$ ist.

Ist $z_f^{n+2} \neq 0$, so kann man f also nicht auf K^{n+2} fortsetzen, aber man kann versuchen, die Abbildung f auf den $(n+1)$ -dimensionalen Simplexen des Komplexes K so zu variieren, daß die so entstehende neue Abbil-

Abbildung f' auf K^{n+2} fortsetzbar ist, daß also $z_{f'}^{n+2} = 0$ ist. Dazu interessiert die Menge aller solchen Abbildungen f' , die man durch Variation der Abbildung f nur in der Dimension $n+1$ erhält. Zu diesen Abbildungen bekommt man eine Menge von Obstruktions-Kozyklen. Für diese gilt, daß sie alle in einer Kohomologieklassse liegen. Die Menge dieser Obstruktionen bzw. diese Obstruktions-Kohomologieklassse nennt man die zweite Obstruktion. Über die zweite Obstruktion gilt der

(1) Satz:

Die Kohomologieklassse der zweiten Obstruktion ist dann und nur dann Null, wenn man die Abbildung f in der Dimension $n+1$ so variieren kann, daß die variierte Abbildung f' auf K^{n+2} fortsetzbar ist, daß also $z_{f'}^{n+2} = 0$ ist.

Ist die Kohomologieklassse der zweiten Obstruktion nicht Null, so muß man die Abbildung f mindestens in den Dimensionen $n+1$ und n variieren, um eine Abbildung zu erhalten, die dann auf K^{n+2} fortsetzbar ist. Allgemein interessiert die Menge der Obstruktionen $z_{f^n}^{n+2}$ aller möglichen Abbildungen f^n , die durch Variation von f in den Dimensionen $n+1, n, \dots, n-r+3$ entstehen. Die Menge aller dieser Obstruktionen nennt man die r -te Obstruktion. Diese Menge liegt i.a. nicht mehr in einer Kohomologieklassse.

Das Ziel unserer Untersuchung ist es, über die Anzahl von Kohomologieklassen der r -ten Obstruktion Aussagen zu machen. Der Weg dazu ist folgender:

Zunächst wird die Obstruktions-Kohomologiekasse $\{z_f^{n+2}\}$ einer Abbildung

$$f : K^{n+1} \longrightarrow Y$$

ausgedrückt durch die Postnikov-Invariante $\{k^{n+2}\}$ mit Hilfe einer Abbildung von K in $X^{(n)}$, wobei $X^{(n)}$ der an n -ter Stelle stehende Raum des Postnikov-Systems des Raumes Y ist. Es interessieren also die Homotopieklassen von Abbildungen von K in $X^{(n)}$. Es wird für gewisse Fälle eine eindeutige Beziehung zwischen Überlagerungs- (=lifting-) Homotopieklassen von Abbildungen: $K \longrightarrow X^{(n)}$ einer Homotopiekasse von Abbildungen: $K \longrightarrow X^{(n-1)}$ und den Elementen der Kohomologiegruppe $H^n(K, \pi_n(Y))$ aufgestellt. Es wird sich aber zeigen, daß diese eindeutige Zuordnung keine in dem Sinne "natürliche" ist, daß sie mit stetigen Abbildungen vertauschbar ist; eine Eigenschaft, die auch von den Kohomologieoperationen gefordert wird. Eine solche natürliche Zuordnung wäre deshalb von Interesse, da man bestrebt ist, die höheren Obstruktionen durch Kohomologieoperationen auszudrücken und die Frage zu beantworten, ob alle höheren Obstruktionen überhaupt durch Kohomologieoperationen ausdrückbar sind.

Da eine im obigen Sinne natürliche Zuordnung von Homotopie- und Kohomologieklassen nicht existiert, müssen wir uns mit den erwähnten quantitativen Aussagen begnügen.

Grundbegriffe

Zunächst definieren wir die für unsere Betrachtungen grundlegenden Begriffe (nach Lamotke (2)).

Δ_n sei das n -dimensionale euklidische Standard-simplex. Wir numerieren die Ecken von Δ_n in einer gewissen festgewählten Reihenfolge: $0, 1, \dots, n$. $[n]$ bedeute die Zahlenfolge $(0, 1, \dots, n)$.

$\alpha: [m] \longrightarrow [n]$ sei eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \dots \leq \alpha(m).$$

Jede solche Funktion bestimmt eindeutig eine affine Abbildung $\bar{\alpha}: \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$.

Im folgenden seien alle Funktionen schwach monoton.

Insbesondere werden wir folgende Funktionen brauchen:

$$\lambda_n^1: [n-1] \longrightarrow [n], \quad \lambda_n^1(j) = \begin{cases} j & \text{für } 0 \leq j < 1 \\ j+1 & \text{für } 1 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$\eta_n^1: [n+1] \longrightarrow [n], \quad \eta_n^1(j) = \begin{cases} j & \text{für } 0 \leq j \leq 1 \\ j-1 & \text{für } 1 < j \leq n+1 \end{cases}$$

Definition des singulären Komplexes

$S(X)$ eines topologischen Raumes X :

Ein n -dimensionales Simplex T in $S(X)$ ist eine stetige Abbildung

$$T : \Delta_n \longrightarrow X .$$

Die Menge der n -dimensionalen Simplexe werde mit $S(X)_n$ bezeichnet.

Wir definieren den Seitenoperator

$$d_1^n : S(X)_n \longrightarrow S(X)_{n-1} ,$$

$0 \leq i \leq n$, durch

$$d_1^n T = T \bar{\lambda}_n^1 ,$$

und den Entartungsoperator

$$s_1^n : S(X)_n \longrightarrow S(X)_{n+1} ,$$

$0 \leq i \leq n$, durch

$$s_1^n T = T \bar{\eta}_n^1 .$$

$d_1^n T$ heiße die i -te Seite von T ,

$s_1^n T$ die i -te Entartung von T .

Definition des semisimplizialen Komplexes:

Ein semisimplizialer Komplex (ss.Komplex) X besteht aus

1) einer Folge von Mengen

$$X_0, X_1, \dots, X_n, \dots,$$

die zueinander fremd sind. Ein Element aus X_n heißt ein n -dimensionales Simplex von X .

2) Funktionen

$$d_1^n : X_n \longrightarrow X_{n-1}, \quad 0 \leq 1 \leq n, \text{ und}$$

Funktionen

$$s_1^n : X_n \longrightarrow X_{n+1}, \quad 0 \leq 1 \leq n,$$

für die folgende Vertauschungsregeln gelten
(die oberen Indizes sind weggelassen):

$$d_{j-1} d_1 = d_1 d_j, \quad 1 < j,$$

$$s_1 s_{j-1} = s_j s_1, \quad 1 < j,$$

$$d_1 s_j = s_{j-1} d_1, \quad 1 < j,$$

$$d_1 s_1 = d_{1+1} s_1 = \text{id.}$$

$$d_1 s_j = s_j d_{1-1}, \quad 1 > j+1.$$

Definition der semisimplizialen Abbildung:

X und Y seien ss.Komplexe. Eine Funktion

$$f : X \longrightarrow Y$$

heißt eine semisimpliziale Abbildung (ss.Abbildung),
wenn gilt

$$f(X_n) \subset Y_n;$$

$$f d_1 = d_1 f$$

$$f s_1 = s_1 f.$$

Zwei ss.Komplexe heißen isomorph, wenn es eine
ss.Abbildung

$$g : Y \longrightarrow X \text{ gibt, so daß}$$

$$g f = \text{id. und}$$

$$f g = \text{id. ist.}$$

Definition des Kartesischen Produktes:

X und Y seien ss.Komplexe. Wir definieren den ss.Komplex

$$X \times Y$$

durch $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$d_1(x, y) = (d_1x, d_1y), \quad x \in X_n, \\ y \in Y_n.$$

$$s_1(x, y) = (s_1x, s_1y).$$

Definition des Kankomplexes:

Fehlt bei einer Sphäre ein Simplex, so nennt man dies einen Trichter.

Kankomplexe heißen diejenigen ss.Komplexe, die folgende Bedingung erfüllen:

Wenn die $(n-1)$ -dimensionalen Simplexe $x_0 \dots \hat{x}_k \dots x_n$, $0 \leq k \leq n$, in X einen Trichter bilden, gibt es für alle $n > 0$ ein n -dimensionales Simplex $y \in X$ mit der Eigenschaft

$$d_1y = x_1 \quad i = 0, \dots, k, \dots, n.$$

Der singuläre Komplex eines topologischen Raumes ist ein Kankomplex.

Definition des minimalen Komplexes:

Ein ss.Komplex X heißt minimal, wenn für irgend zwei n -dimensionale Simplexe x_0 und x_1 in X gilt:

Wenn x_0, x_1 homotop sind, dann sind sie gleich.

Definition der ss.Faserung:

Eine ss.Faserung wird anders definiert als der Faserraum gewöhnlich. Es zeigt sich aber (Lamotke (2)), daß die übliche Eigenschaft der Homotopieüberlagerung aus der Definition hier folgt.

Ein Tripel (E, p, B) , wobei E und B ss.Komplexe sind und p eine ss.Abbildung von E in B ist, heißt eine ss.Faserung, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Wenn in E ein $(n-1)$ -dimensionaler Trichter $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$ gegeben ist und in B ein n -dimensionales Simplex y , so daß $p(x_1) = d_1 y$ für alle $1 \neq k$ ist, dann soll es in E ein n -dimensionales Simplex x mit der Eigenschaft $p(x) = y$ geben, für das $d_1 x = x_1$ ist für alle $1 \neq k$.

Stetige und semisimpliziale Abbildungen.

K sei ein Simplizialkomplex, Y ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß die Homotopiegruppen $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$ sind. Jede stetige Abbildung f von K in Y induziert eine ss.Abbildung von K in $S(Y)$, den singulären Komplex von Y . $X = M(S(Y))$ sei ein minimaler Kankomplex zum singulären Komplex $S(Y)$. (Lamotke (2)). Da X und Y vom gleichen Homotopietyp sind, reicht es, für das Studium der Obstruktionen

die durch f induzierte ss.Abbildung von K in X zu betrachten.

Das Postnikov-System zu Y .

(Moore (5), Lamotke (2))

Einem minimalen Kankomplex X wird eine Faserfolge

$$(2) \quad \dots \rightarrow X^{(n)} \xrightarrow{p_{n-1}} X^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(1)}$$

auf folgende Weise zugeordnet:

Definition von $X^{(n)}$:

In X wird eine Äquivalenzrelation eingeführt, und zwar heißen zwei p -dimensionale Simplexe von X äquivalent, wenn sie in den n -dimensionalen Seiten übereinstimmen. Die so gebildeten Äquivalenzklassen sind die p -dimensionalen Simplexe von $X^{(n)}$. $X^{(n)}$ ist wieder ein minimaler Kankomplex.

Definition von p_n :

$$p_n^! : X \longrightarrow X^{(n)}$$

ist die ss-Abbildung, die jedem Simplex von X seine Äquivalenzklasse zuordnet. Wenn $X = X^{(n+1)}$ ist, wird $p_n^!$ mit p_n bezeichnet,

$$p_n : X^{(n+1)} \longrightarrow X^{(n+1)(n)} = X^{(n)}.$$

Ist $X = M(S(Y))$, so ist die Faserfolge (2) das dem Raum Y bzw. dem Komplex X zugeordnete Postnikov-System (im Sinne Moores (5)).

Der Limes der Faserfolge (2) ist folgender ss. Komplex $X^{(\infty)}$:

Ein q -dimensionales Simplex aus $X^{(\infty)}$ ist eine Folge

$$(x_q^{(1)}, x_q^{(2)}, \dots, x_q^{(n)}, \dots),$$

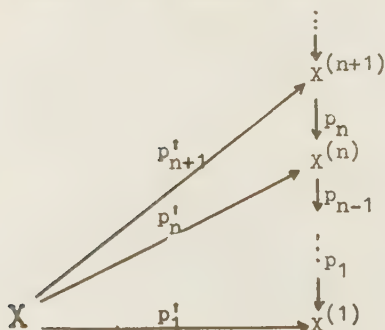
wobei $x_q^{(n)}$ ein q -dimensionales Simplex aus $X^{(n)}$ ist; außerdem gelte

$$p_{n-1}(x_q^{(n)}) = x_q^{(n-1)}$$

für alle $n > 1$.

Einige Eigenschaften des Postnikov-Systems.

(Moore (5), Lamotke (2))



$$(3) p_n^! : X^n \longrightarrow X^{(n)n}$$

ist ein Isomorphismus.

(4) Die ss.Abbildung

$$f : X \longrightarrow X^{(\infty)},$$

die durch

$$f(x) = (p_1^!(x), \dots, p_n^!(x), \dots)$$

definiert ist, ist ein Isomorphismus. Mit Hilfe dieses Isomorphismus wollen wir im folgenden X und $X^{(\infty)}$ identifizieren.

(5) Für die Homotopiegruppen von $X^{(n)}$ gilt:

Der durch

$$p_{n-1} : X^{(n)} \longrightarrow X^{(n-1)}$$

induzierte Homomorphismus

$$p_{n-1}^* : \pi_q(X^{(n)}) \longrightarrow \pi_q(X^{(n-1)})$$

ist ein Isomorphismus für $q \leq n-1$.

$$\pi_r(X^{(n)}) = 0 \quad \text{für } r > n,$$

$$\pi_r(X^{(n-1)}) = 0 \quad \text{für } r \geq n.$$

Postnikov-Invariante und Obstruktion.

Ein Schnitt in der Faserung

$$(X^{(n+1)}, p_n, X^{(n)})$$

ist eine ss.Abbildung

$$g : X^{(n)} \longrightarrow X^{(n+1)}$$

mit der Eigenschaft

$$p_n g = \text{id.}.$$

Man kann immer einen Schnitt $g|X^{(n)n+1}$ auf dem $(n+1)$ -dimensionalen Gerüst von $X^{(n)}$ konstruieren.

Alle diese Schnitte stimmen auf dem n -dimensionalen Gerüst überein, definieren also nach (1) eine Obstruktions-Kohomologiekasse

$$\{k^{n+2}\} \in H^{n+2}(X^{(n)}, \pi_{n+1}(X^{(n+1)})) \\ = H^{n+2}(X^{(n)}, \pi_{n+1}(X)).$$

Die Kohomologieklassen $\{k^{n+2}\}$ sind die Postnikov-Invarianten des Raumes Y bzw. des Minimalkomplexes $X = M(S(Y))$.

Sei die ss.Abbildung

$$f : K^{n+1} \longrightarrow X$$

gegeben. Dann ist die Obstruktion $z_f^{n+2} \in Z^{n+2}(K, \pi_{n+1}(X))$ definiert. Die Kohomologiekasse $\{z_f^{n+2}\}$ dieser Obstruktion soll mit der Postnikov-Invarianten $\{k^{n+2}\}$ in Beziehung gebracht werden.

Die ss.Abbildung

$$p_n^! f : K^{n+1} \longrightarrow X^{(n)}$$

ist auf ganz K erweiterbar, da die Koeffizientenbereiche $\pi_q(X^{(n)})$ der Obstruktionen für die Abbildung $p_n^! f$ alle Null sind für $q \geq n+1$. Sei also

$$F : K \longrightarrow X^{(n)}$$

eine Erweiterung von $p_n^i f$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ K \supset K^{n+1} \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f_n^i} X^{(n)} \end{array}$$

Dann ist (Shiraiwa (8))

$$(6) \quad \{z_f^{n+2}\} = F^* \{k^{n+2}\},$$

wobei

$$F^*: H^{n+2}(X^{(n)}, \pi_{n+1}(X)) \rightarrow H^{n+2}(X^{(n)}, \pi_{n+1}(X))$$

der durch F induzierte Homomorphismus ist.

Dieser Satz besagt u.a., daß es höchstens so viele Kohomologieklassen $\{z_f^{n+2}\}$ gibt, wie es Homotopieklassen $[F]$ von Abbildungen $f: K \rightarrow X^{(n)}$ gibt.

Deshalb betrachten wir

Abbildungen von K in $X^{(n)}$.

(7) Satz: Eine ss.Abbildung

$$F: K \rightarrow X^{(n)}$$

ist schon durch ihre Beschränkung $F|K^{(n)}$ auf das n -dimensionale Gerüst von K bestimmt.

Beweis: Seien

$$F_1, F_2: K \rightarrow X^{(n)}$$

zwei Erweiterungen von $F|K^n$. Sei s_{n+1} ein $(n+1)$ -

dimensionales Simplex aus K . Dann ist

$$F_1(d_i(s_{n+1})) = F_2(d_i(s_{n+1}))$$

für alle i , da F_1 und F_2 auf K^n übereinstimmen,
also

$$d_1(F_1(s_{n+1})) = d_1(F_2(s_{n+1}))$$

für alle i , da F_1 und F_2 ss. Abbildungen sind.

$F_1(s_{n+1})$ und $F_2(s_{n+1})$ sind demnach $(n+1)$ -dimensionale Simplexe von $X^{(n)}$, die auf ihren n -dimensionalen Seiten übereinstimmen. Dann ist aber nach der Definition von $X^{(n)}$

$$F_1(s_{n+1}) = F_2(s_{n+1}).$$

Induktiv zeigt man wörtlich genau so, daß

$$F_1(s_q) = F_2(s_q)$$

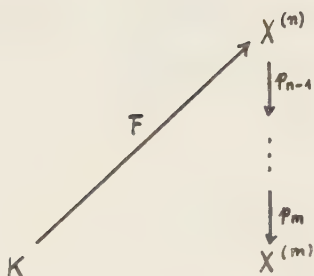
ist für jedes beliebige q -dimensionale Simplex
 $s_q \in K$.

(8) Satz: Alle ss. Abbildungen

$$F : K \longrightarrow X^{(n)},$$

die auf dem m -dimensionalen Gerüst übereinstimmen,
sind Überlagerungen der ss. Abbildung:

$$p_m \dots p_{n-1} F : K \longrightarrow X^{(m)}.$$



Beweis: Seien

$$F_1, F_2 : K \longrightarrow X^{(n)}$$

ss. Abbildungen mit der Eigenschaft

$$F_1 \mid K^{(m)} = F_2 \mid K^{(m)}.$$

Für die ss. Abbildungen

$$p_m \cdots p_{n-1} F_1 : K \longrightarrow X^{(m)} \quad \text{und}$$

$$p_m \cdots p_{n-1} F_2 : K \longrightarrow X^{(m)}$$

gilt dann nach Voraussetzung

$$p_m \cdots p_{n-1} F_1 \mid K^{(m)} = p_m \cdots p_{n-1} F_2 \mid K^{(m)}.$$

Also ist nach (7)

$$p_m \cdots p_{n-1} F_1 = p_m \cdots p_{n-1} F_2.$$

Sei eine ss. Abbildung

$$f : K^{n+1} \longrightarrow X$$

gegeben. Für die $(n+2)$ -dimensionale Obstruktion z_f^{n+2} dieser Abbildung war

$$\{z_f^{n+2}\} = F^* \{k^{n+2}\}.$$

Betrachten wir die r -te Obstruktion, also die Menge der Obstruktions-Kohomologieklassen $\{z_f^{n+2}\}$, die man durch Variation von f nur in den Dimensionen $n+1, n, \dots, n-r+3$ zu f' erhält. Dann ist also für alle f'

$$f' \mid K^{n-r+2} = f \mid K^{n-r+2}.$$

Sei $\{F_1\}$ die Menge aller Erweiterungen

$$F_1 : K \longrightarrow X^{(n)}$$

von

$$p_n' f \mid K^{n-r+2} : K^{n-r+2} \longrightarrow X^{(n)}.$$

Alle F_1 stimmen auf dem $(n-r+2)$ -dimensionalen Gerüst überein, da für alle i

$$F_1 \mid K^{n-r+2} = p_n' f \mid K^{n-r+2}$$

ist. Alle F_1 sind also nach (8) Überlagerungen der einen ss.Abbildung

$$p_{n-r+2} \dots p_{n-1} p_n' f : K \longrightarrow X^{(n-r+2)}.$$

Nun erhält man nach (6) die Menge der Kohomologieklassen der r -ten Obstruktion, indem man die Postnikov-Invariante $\{k^{n+2}\}$ durch alle $F_1^* : H^{n+2}(X^{(n)}, \pi_{n+1}(X)) \longrightarrow H^{n+2}(K, \pi_{n+1}(X))$ abbildet.

(9) Die r -te Obstruktion umfaßt also höchstens so viele Kohomologieklassen, wie es Homotopieklassen von Überlagerungen

$$F : K \longrightarrow X^{(n)}$$

einer Homotopieklasse von Abbildungen

$$K \longrightarrow X^{(n-r+2)}$$

gibt.

Es interessieren also die ss.Abbildungen, die Überlagerungen

$$f_n : K \longrightarrow X^{(n)}$$

einer ss.Abbildung

$$f_{n-1} : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

sind.

$$\begin{array}{ccc} & & X^{(n)} \\ & \nearrow f_n & \downarrow p_{n-1} \\ K & \xrightarrow{f_{n-1}} & X^{(n-1)} \end{array}$$

Dazu gilt zunächst der Satz (Postnikov (7), Lamotke (2))

(10) Die ss.Abbildung

$$f_{n-1} : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

sei gegeben. Dann besteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Überlagerungen

$$f_n : K \longrightarrow X^{(n)}$$

von f_{n-1} und den Koketten

$$a^n \in C^n(K, \pi_n(X)),$$

für die die Gleichung gilt:

$$f_{n-1}^* k^{n+1} + \delta a^n = 0.$$

Um einen weiteren Satz über die betrachteten Überlagerungen formulieren zu können, müssen wir zunächst einen einer Homotopie zugeordneten Homomorphismus gewisser Kokettengruppen definieren (Lamotke (2)).

R und S seien ss.Komplexe und f_0, f_1 homotope ss.Abbildungen von R in S . Die Homotopie zwischen f_0 und f_1 sei die ss.Abbildung

$$F : R \times I \longrightarrow S.$$

Für jede Dimension n definieren wir Funktionen

$$h_1 : R_n \longrightarrow S_{n+1},$$

wobei R_n die Menge der n -dimensionalen Simplexe von R bezeichnet; entsprechend S_{n+1} . Und zwar wird h_1 folgendermaßen definiert, wenn $x \in R_n$ ist :

$$h_1(x) = F(s_1 x, s_n \hat{s}_1 \dots s_0(0,1)).$$

Dabei bedeutet s_1 den i -ten Entartungsoperator und $(0,1)$ das 1-dimensionale Simplex aus I mit den Ecken $0,1$. Wir definieren einen Homomorphismus

$$D : C^{n+1}(S, G) \longrightarrow C^n(R, G)$$

der Kokettengruppen mit Koeffizienten in G durch:

$$D(a) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a h_i.$$

Dann ist

$$(11) \quad D\delta + \delta D = f_1^* - f_0^*,$$

wobei f_1 und f_0 die durch f_1 und f_0 induzierten Homomorphismen der Kohomologiegruppen sind. D heiße der der Homotopie F zugeordnete Homomorphismus.

Da der Faserraum

$$(X^{(n)}, p_{n-1}, X^{(n-1)})$$

die Eigenschaften (3), (4), (5) hat, gilt der

(12) Satz (Postnikov (7), Lamotke (2)):

Die ss. Abbildungen

$$f_{n-1}, \bar{f}_{n-1} : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

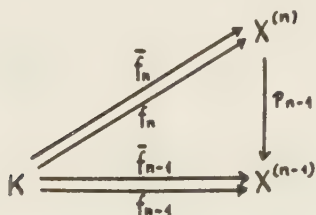
seien gegeben, und es sei

$$F_{n-1} : K \times I \longrightarrow X^{(n-1)}$$

eine Homotopie von f_{n-1} nach $\bar{f}_{n-1} \circ f_{n-1}$ sei durch eine ss. Abbildung

$$f_n : K \longrightarrow X^{(n)}$$

überlagert, $\bar{f}_{n-1}$ durch $\bar{f}_n : K \longrightarrow X^{(n)}$.



Die Homotopie F_{n-1} läßt sich genau dann durch eine Homotopie

$$F_n : K \times I \longrightarrow X^{(n)}$$

zwischen f_n und $\bar{f}_n$ überlagern, wenn es eine Kokette

$$b^{n-1} \in C^{n-1}(K, \pi_n(X))$$

gibt mit der Eigenschaft

$$(13) \quad a_1^n - a_0^n = \delta b^{n-1} - D K^{n+1}.$$

Dabei sind

$$a_0^n, a_1^n \in C^n(K, \pi_n(X))$$

die Koketten, die nach (10) zu den Überlagerungen f_n und $\bar{f}_n$ von f_{n-1} und $\bar{f}_{n-1}$ gehören, und D ist der Homomorphismus, der nach (11) zur Homotopie F_{n-1} gehört.

Bei Lamotke (2) hat die Gleichung (13) etwas andere Form, da dort lokale Koeffizientensysteme betrachtet werden, d.h. jedem Punkt x eines ss.Komplexes R ist eine Koeffizientengruppe $G(x)$ für die Koketten zugeordnet. Jedem Weg $w = (d_0 d_1)$ in R ist ein Isomorphismus

$$i(w) : G(d_1) \longrightarrow G(d_0)$$

zugeordnet. In unserem Fall haben wir eine einzige Koeffizientengruppe für den ganzen Raum und jeder Isomorphismus $i(w)$ ist die Identität.

Ein solcher Isomorphismus $i(w)$, der bei uns also weggelassen werden kann, tritt bei Zugrundelegung eines lokalen Koeffizientensystems in (13) auf. (13) hat dann die Form:

$$i(w) \quad a_1^n - a_0^n = \delta b^{n-1} - D k^{n+1}.$$

Entsprechendes gilt für (11). Diese Beziehung hat dann die Form

$$D \delta + \delta D = i(w) \quad f_1^* - f_0^*.$$

Überlagerungen von Abbildungen im Postnikov-System

Seien f_1 und f_2 homotope ss.Abbildungen von K in $X^{(n)}$. Eine Homotopie

$$F : K \times I \longrightarrow X^{(n)}$$

zwischen diesen beiden Abbildungen werde ausgezeichnet und mit

$$F(f_1, f_2)$$

bezeichnet. Der dieser Homotopie zugeordnete Homomorphismus D werde entsprechend mit

$$D(f_1, f_2)$$

bezeichnet.

Wir untersuchen nun die Frage:

Wieviel Homotopieklassen von Überlagerungen $K \rightarrow X^{(n)}$ gibt es zu einer Homotopieklassse von Abbildungen : $K \rightarrow X^{(n-1)}$.

Zunächst sollen die Überlagerungen

$$g : K \rightarrow X^{(n)}$$

einer einzigen Abbildung

$$f : K \rightarrow X^{(n-1)}$$

betrachtet werden.

Nach (10) wird g durch f und eine Kokette $a \in C^n(K, \pi_n(X))$ beschrieben. Dieser Sachverhalt werde ausgedrückt durch die Schreibweise

$$g = g_{(f,a)} .$$

(14) Satz:

Die Abbildungen

$$g_{(f,\bar{a})} : K \longrightarrow X^{(n)}$$

und

$$g_{(f,a)} : K \longrightarrow X^{(n)}$$

sind genau dann homotop, wenn

$$\bar{a} - a \sim 0 \quad \text{ist.}$$

Beweis:

1) Sei $\bar{a} - a \sim 0$.

Man wähle irgendeine zu $g_{(f,a)}$ homotope Abbildung

$g_{(f_1,c)}$.

Dann ist nach (12)

$$a - c + D_{(f,f_1)} \cdot k^{n+1} \sim 0 .$$

Dann sind aber die Abbildungen

$$g_{(f,\bar{a})} \quad \text{und} \quad g_{(f_1,c)}$$

auch homotop, denn

$$\begin{aligned} & \bar{a} - c + D_{(f,f_1)} k^{n+1} \\ &= a + \delta - c + D_{(f,f_1)} k^{n+1} \end{aligned}$$

(wobei δ nach Voraussetzung ein n -dimensionaler
Korand ist)

$$\sim 0, \text{ da } a - c + D_{(f,f_1)} k^{n+1} \sim 0 \text{ ist.}$$

Es folgt

$$g_{(f,a)} \simeq g_{(f_1,c)} \simeq g_{(f,\bar{a})} .$$

2) Seien umgekehrt die beiden Abbildungen

$$g(f, a) \quad \text{und} \quad g(f, \bar{a})$$

homotop.

Dann ist nach (12)

$$(15) \quad \bar{a} - a + D(f, f) k^{n+1} \sim 0.$$

Da die Abbildung $g(f, a)$ zu sich selbst homotop ist, ist nach (12)

$$a - a + D(f, f) k^{n+1} \sim 0,$$

also

$$D(f, f) k^{n+1} \sim 0.$$

Daraus folgt mit (15)

$$\bar{a} - a \sim 0.$$

Es soll nun die Menge aller Überlagerungen

$$g : K \longrightarrow X^{(n)}$$

einer Abbildung

$$f : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

untersucht werden, d.h.:

Sei

$$f : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

gegeben, und es sei dazu

$$g(f, a) : K \longrightarrow X^{(n)}$$

eine Überlagerung. Welche Möglichkeiten für

$\bar{a} \in C^n(K, \pi_n(X))$ gibt es, so daß

$$g_{(f, \bar{a})} : K \longrightarrow X^{(n)}$$

eine Überlagerung von f ist ?

Darüber gilt folgender Satz:

(16) Sei $g_{(f, a)}$ eine Abbildung von K in $X^{(n)}$.

Dann ist $g_{(f, \bar{a})}$ genau dann eine Abbildung von K in $X^{(n)}$, wenn

$$\bar{a} - a = z$$

ein Kozyklus ist.

Beweis:

1) Sei $g_{(f, \bar{a})}$ eine Abbildung von K in $X^{(n)}$.

Dann ist nach (10)

$$\delta \bar{a} - k^{n+1} f = 0.$$

Andererseits ist auch

$$\delta a - k^{n+1} f = 0.$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt

$$\delta(\bar{a} - a) = 0,$$

d.h. $\bar{a} - a$ ist ein Kozyklus.

2) Ist umgekehrt

$$\bar{a} - a = z$$

ein Kozyklus, so ist

$$\begin{aligned} & \delta \bar{a} - k^{n+1} f \\ &= \delta(a + z) - k^{n+1} f \\ &= \delta a - k^{n+1} f = 0. \end{aligned}$$

Also ist $g_{(f, \bar{a})}$ eine Abbildung von K in $X^{(n)}$.

Aus (14) und (16) folgt:

Die Abbildung

$$f : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

sei gegeben.

Nach (16) erhält man alle Überlagerungen

$$g(f, a) : K \longrightarrow X^{(n)}$$

der Abbildung f , indem man eine Überlagerung

$$g(f, a_0) : K \longrightarrow X^{(n)}$$

auswählt, sofern überhaupt eine existiert,

und zu a_0 alle Kozyklen $z^n \in Z^n(K, \pi_n(X))$ addiert.

Dabei sind nach (14) zwei Überlagerungen von f genau dann homotop, wenn die addierten Kozyklen kohomolog sind. D.h.:

Wenn es zur Abbildung f überhaupt eine Überlagerung gibt, dann gibt es genau N_n Homotopieklassen von Überlagerungen, wobei N_n die Anzahl der Elemente der Kohomologiegruppe

$$H^n(K, \pi_n(X))$$

ist.

Geht man nun von einer ganzen Homotopieklasse von Abbildungen

$$f : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

aus, so gilt der Satz

(17) Jede Abbildung aus der Homotopieklasse $[f]$ hat dieselben und keine weiteren Homotopieklassen von Überlagerungen

$$g : K \longrightarrow X^{(n)}$$

wie die Abbildung f .

Oder anders ausgedrückt:

Wenn die Abbildungen

$$f : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

und

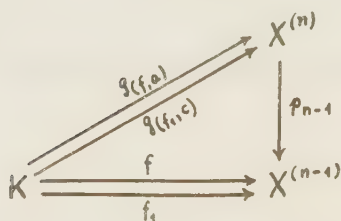
$$f_1 : K \longrightarrow X^{(n-1)}$$

homotop sind, dann ist jede Überlagerung

$$g(f_1, c) : K \longrightarrow X^{(n)}$$

homotop einer Überlagerung

$$g(f, a) : K \longrightarrow X^{(n)}.$$



Beweis:

Die Homotopie zwischen f_1 und f sei

$$F(f_1, f) : K \times I \longrightarrow X^{(n-1)}.$$

Da $(X^{(n)}, p_{n-1}, X^{(n-1)})$ ein Faserraum ist, heißt das:

Da der "Anfang" f_1 der Homotopie $F_{(f_1, f)}$ überlagert werden kann durch $g_{(f_1, c)}$, kann die ganze Homotopie $F_{(f_1, f)}$ überlagert werden durch eine Abbildung

$$G : K \times I \longrightarrow X^{(n)}$$

mit der Eigenschaft

$$p_{n-1} G = F_{(f_1, f)}.$$

Da das "Ende" der Homotopie G unter p_{n-1} übergeht in f , hat es die Form $g_{(f, a)}$. Also ist die Abbildung $g_{(f_1, c)}$ homotop einer Abbildung $g_{(f, a)}$.

Zusammenfassend folgt aus (14), (16), (17):

Zu jeder Homotopieklasse von Abbildungen von K in $X^{(n-1)}$ gibt es, sofern es überhaupt zu einer Abbildung davon eine Überlagerung gibt, genau N_n Homotopieklassen von Überlagerungen $g : K \longrightarrow X^{(n)}$.

Also erhält man allgemeiner: Zu einer Homotopieklasse von Abbildungen

$$h : K \longrightarrow X^{(m)}$$

gibt es höchstens $N_n \cdot N_{n-1} \cdot \dots \cdot N_m$ Homotopieklassen von Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc}
 & & X^{(n)} \\
 & \nearrow g & \downarrow p_{n-1} \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow p_m \\
 K & \xrightarrow{h} & X^{(m)}
 \end{array}$$

Anwendung auf Obstruktionstheorie

Mit (9) folgt

(18) Satz:

Die r -te Obstruktion $\{z_f^{n+2}\}$ umfaßt höchstens $N_n \cdot N_{n-1} \cdot \dots \cdot N_{n-r+3}$ Kohomologieklassen.

Speziell gilt also

(19) Satz:

Wenn die Kohomologiegruppen $H^1(K, \pi_1(X))$ Null sind für $1 = n-r+3, \dots, n$, dann ist die Kohomologieklass $\{z^{n+2}\}$ der r -ten Obstruktion eindeutig bestimmt.

In der Anwendung bedeutet etwa (19) folgendes:

Es sei eine Abbildung

$$f : K^{n+1} \longrightarrow Y$$

gegeben, die möglicherweise auf K^{n+2} nicht fortsetzbar ist. Kann man die Abbildung f in den Dimensionen $n+1, n, \dots, n-r+3$ so variieren zu einer Abbildung $f' : K^{n+1} \longrightarrow Y$, daß f' dann auf K^{n+2} fortsetzbar ist und sind die Voraussetzungen von (19) erfüllt, so folgt aus (19), daß man dann die Abbildung f gar nicht bis zur Dimension $n-r+3$ zu variieren braucht, sondern daß es dann möglich ist, durch Variation der Abbildung f allein in der Dimension $n+1$ zu einer Abbildung $f'' : K^{n+1} \longrightarrow Y$ zu erreichen, daß f'' auf K^{n+2} fortsetzbar ist, denn:

Nach (19) liegt die Kohomologieklass $\{z_f^{n+2}\}$ der r -ten Obstruktion fest, wie man auch immer f bis

zur Dimension $n-r+3$ herunter variiert. Es ist also auch $\{z_f^{n+2}\} = \{z_f^{n+2}\}$. Da f' auf K^{n+2} fortsetzbar ist, ist $\{z_f^{n+2}\} = 0$, also auch $\{z_f^{n+2}\} = 0$. Daraus folgt nach (1), daß man die Abbildung f in der Dimension $n+1$ so variieren kann, daß die so entstehende Abbildung auf K^{n+2} fortsetzbar ist.

Kozykloide (Postnikov (7), Lamotke (2))

Sei wieder $P = \{(X^{(n)}, p_{n-1}, X^{(n-1)})\}$ das Postnikov-System zu X und K ein beliebiger Simplicialkomplex.

Definition: Ein Kozykloid auf K über P ist eine Folge von Koketten

$$a^1 \in C^1(K, \pi_1(X))$$

mit den Eigenschaften

$$a^1 = 0$$

und

$$(20) \quad f_{i-1} k^{i+1} + \delta a^1 = 0,$$

$$i = 2, 3, \dots$$

Die ss.Abbildungen f_{i-1} werden induktiv definiert:

Zu f_1 :

Zunächst gilt : $X^{(1)} = K(\pi, 1)$, wobei $K(\pi, 1)$ der Eilenberg-MacLane-Raum mit $\pi = \pi_1(X) = 0$ ist.

Außerdem besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den ss.Abbildungen von K in $K(\pi, 1)$ und den

Kozyklen $z^1 \in Z^1(K, \pi)$. $f_1 : K \rightarrow X^{(1)} = K(\pi, 1)$ sei die dem Kozyklus a^1 zugeordnete Abbildung.

Es sei die ss.Abbildung

$$f_{1-1} : K \rightarrow X^{(1)}$$

bereits definiert. Auf Grund von (20) wird

$$f_1 : K \rightarrow X^{(1)}$$

als die Überlagerung von f_{1-1} definiert, die nach (10) der Kokette a_1 zugeordnet ist.

Dann besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen ss.Abbildungen

$$f : K \rightarrow X = X^{(\infty)}$$

und Kozykloiden

$$(a^1, a^2, \dots, a^n, \dots).$$

Ebenso besteht eine eindeutige Beziehung zwischen ss.Abbildungen

$$f_1 : K \rightarrow X^{(1)}$$

und endlichen Kozykloiden

$$(a^1, a^2, \dots, a^n).$$

Für die Koketten a^1 gilt dabei

$$f_{1-1} k^{1+1} + \delta a^1 = 0$$

für $i = 2, \dots, n$.

Beziehung zwischen Homotopieklassen und Kohomologie- klassen

Nach (14), (16), (17) ist die Anzahl der Homotopieklassen von Überlagerungen : $K \rightarrow X^{(n)}$ einer Homotopieklasse von Abbildungen : $K \rightarrow X^{(n-1)}$ Null oder gleich der Anzahl der Elemente der Kohomologiegruppe $H^n(K, \pi_n(X))$. Im zweiten Fall kann man also zwischen beiden eine eindeutige Zuordnung herstellen, die aber i.a. als solche nicht eindeutig bestimmt ist. Wählt man nun für jedes i eine derartige eindeutige Zuordnung zwischen Überlagerungshomotopieklassen einer Homotopieklasse: $K \rightarrow X^{(i-1)}$ und der Gruppe $H^i(K, \pi_1(X))$, so kann man mit dieser Zuordnung eine Homotopieklasse einer beliebigen Abbildung: $K \rightarrow X^{(n)}$ beschreiben durch eine Folge $(h^1, \dots, h^n)$, wobei die $h^i \in H^i(K, \pi_1(X))$ die Überlagerungen von $i-1$ auf i beschreiben. Die Zuordnung der Homotopieklassen von Abbildungen: $K \rightarrow X^{(n)}$ zu Folgen $(h^1, \dots, h^n)$ ist nach den vorigen Ausführungen auch nicht eindeutig.

Es erhebt sich nun die Frage, ob unter den verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl dieser Zuordnung eine "natürliche" ist. Und zwar soll "natürlich" hier im Sinne "vertauschbar mit Abbildungen" gemeint sein. D.h. folgendes:

Sei $[f]$ eine Homotopieklasse von ss.Abbildungen: $K \rightarrow X^{(n)}$ und $[g]$ eine Homotopieklasse von ss.Abbil-

dungen $L \rightarrow K$.

$$L \xrightarrow{[g]} K \xrightarrow{[f]} X^{(n)}$$

Der Abbildungsklasse $[f]$ sei die Folge

$$(h^1, \dots, h^n), \quad h^i \in H^1(K, \pi_1(X)),$$

zugeordnet. Der Abbildungsklasse $[fg]$ sei die Folge

$$(j^1, \dots, j^n), \quad j^i \in H^1(L, \pi_1(X)),$$

zugeordnet. Dann sollen diese Zuordnungen "natürlich" heißen, wenn $j^i = g^* h^i$ ist, $i = 1, \dots, n$.

Eine solche natürliche Zuordnung ist aber unmöglich, da es nichthomotope Abbildungen

$$g, \bar{g} : L \rightarrow K$$

gibt, für die aber

$$g^* = \bar{g}^*$$

ist; wenn es nun eine natürliche Zuordnung gäbe, wäre

$$(g^* h^1, \dots, g^* h^n) = (\bar{g}^* h^1, \dots, \bar{g}^* h^n),$$

während aber i.a.

$$[fg] \neq [f\bar{g}]$$

ist.

Wie schon einleitend bemerkt, wäre eine in unserem Sinne natürliche Zuordnung von Homotopie- und Kohomologieklassen geeignet, die Kohomologieoperationen zur Beschreibung der r -ten Obstruktion heranzuziehen. Da aber diese natürliche Zuordnung nicht existiert, schließen wir unsere Betrachtungen der Obstruktionen

mit dem Ergebnis, über die Anzahl der Kohomologie-
klassen der r -ten Obstruktion einige Aussagen ge-
wonnen zu haben.

= = =

Lebenslauf

Am 27. Juni 1932 wurde ich in Königstein a.d. Elbe geboren. Ostern 1939 kam ich in Frankfurt a.M. in die Schule. Ostern 1943 wurde ich in Frankfurt in die Oberschule (Klinger-Schule) aufgenommen. Vom Herbst 1943 bis 1945 lebte ich auf dem Lande in Sachsen, wo ich die Oberschule in Waldheim besuchte. Seit 1946 besuchte ich die Musterschule in Frankfurt a.M. Dort bestand ich 1953 das Abitur. Danach bereitete ich mich durch ein Praktikum in einer Frankfurter Maschinenfabrik auf das Ingenieurstudium vor, änderte aber meine Pläne und begann im Wintersemester 1953/54 an der Frankfurter Universität Physik, Mathematik, Chemie und Philosophie zu studieren mit dem Ziel, das Staatsexamen zu machen. Bis zum Staatsexamen im Dezember 1959 studierte ich an der Frankfurter Universität. Seit Januar 1961 verwalte ich hier am Mathematischen Seminar die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten.

Frankfurt a.M., 2. August 1962

